



**COLÉGIO ESTADUAL VISCONDE DE BOM RETIRO -
PIBID**

Plano de aula OBMEP – Agosto e Setembro de 2019

Bolsistas: Marília Scarton, Patrícia Casagrande, Luís Henrique da Costa. Eliane Alves, Liliane Luvisa, Vinicius Gonçalves e Julia Tesser.

Supervisora: Jucele Glowacki

Disciplina: Matemática

Série: 6º ano do ensino fundamental ao 3º ano do ensino médio

Carga horária: 2h por encontro (9)

Conteúdos: OBMEP

Recursos:

- Estimular e promover o estudo da Matemática;
- Incentivar a participação dos alunos na OBMEP, bem como prepará-los para a 2ª fase da Olimpíada;
- Resolver situações problemas recorrentes nas provas da OBMEP.

Metodologia: abordagem expositiva de conteúdo no quadro com resolução de exemplos e na sequência resolução de problemas, bem como a correção dos mesmos.

Resultados: Foram atendidos os alunos dos Níveis I, II e III, que passaram para a segunda fase da Olimpíada, a proposta das oficinas consistia em realizar a resolução das provas anteriores no início das atividades os alunos possuíam dificuldades em interpretar os problemas e realizar as atividades descritivas, com o passar dos encontros os educandos compreenderam a metodologia da avaliação.

Após a realização da 2ª fase da OBMEP, vários alunos receberam premiações:

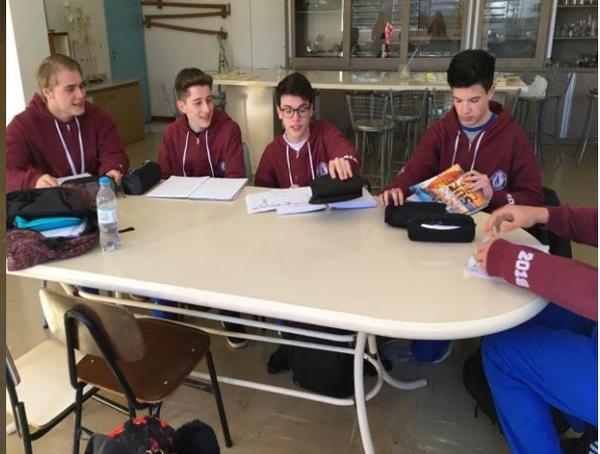
- Alef Pasqualotto / 92: medalha de bronze; (anexo 1)
- Marcos Tonello / 312: menção honrosa;

- Nathan / 311: menção honrosa.

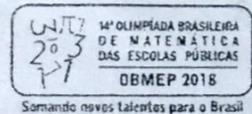
Anexo 1

<https://www.facebook.com/100035726739841/posts/170896357444588?d=n&sfns=mo>

Anexo 2



Cole aqui a etiqueta com os dados do aluno.



Somando novos talentos para o Brasil

Nível 1
6.º e 7.º anos do Ensino Fundamental
2.ª FASE – 15 de setembro de 2018

Nome completo do(a) aluno(a)			
Endereço completo do(a) aluno(a) (Rua, Av., nº)			
Complemento (casa, apartamento, bloco)		Bairro	
Cidade		UF	CEP
Endereço eletrônico (e-mail)		DDD	Telefone
Assinatura		DDD	Telefone (outro)

Visite nossas páginas na Internet:



www.obmep.org.br



www.facebook.com/obmep

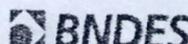
Preencha e confira os dados acima com muita atenção!

INSTRUÇÕES

1. Verifique se os dados da etiqueta desta prova estão corretos. Caso as informações não estejam corretas, comunique o erro ao aplicador imediatamente.
2. Preencha cuidadosamente todos os seus dados no quadro acima. Utilize letra de forma, colocando uma letra/dígito em cada quadradinho e deixando um espaço em branco entre cada palavra.
3. Lembre-se de assinar o quadro acima e a lista de presença.
4. A prova pode ser feita a lápis ou a caneta.
5. A duração da prova é de 3 horas. Você só poderá deixar a sala de prova 45 minutos após o início da prova. Ao terminar a prova, entregue-a ao aplicador.
6. A solução de cada questão deve ser escrita na página reservada para ela, de maneira organizada e legível. Evite escrever as soluções na folha de rascunho.
7. Na correção serão considerados todos os raciocínios que você apresentar. Tente resolver o maior número possível de itens de todas as questões, principalmente o item (a) de cada questão.
8. Respostas sem justificativas não serão consideradas na correção.
9. Não escreva nos espaços sombreados.
10. Não é permitido:
 - a. usar instrumentos de desenho, calculadoras ou qualquer fonte de consulta;
 - b. comunicar-se com outras pessoas, além do aplicador de provas;
 - c. usar quaisquer aparelhos eletrônicos (celulares, tablets, relógios com calculadora, máquinas fotográficas etc.).O não cumprimento dessas regras resultará em sua desclassificação.

Boa prova!

	1	2	3	4	5	6	Total
Correção Regional	<input type="checkbox"/>						
Correção Nacional	<input type="checkbox"/>						



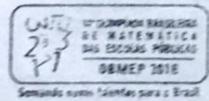
MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÃO E COMUNICAÇÃO

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

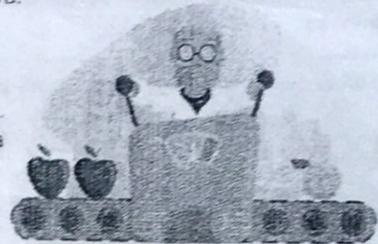
GOVERNO FEDERAL

NÍVEL 1

Respostas sem justificativa não serão consideradas.



1. Uma máquina maluca transforma duas frutas em uma fruta, da seguinte maneira:
- Transforma duas maçãs em uma laranja;
 - Transforma duas laranjas em uma laranja;
 - Transforma uma maçã e uma laranja em uma maçã.



a) Quantas vezes a máquina deve ser usada para transformar três maçãs em uma maçã?

2 vezes

1º ⇒ 2 maçãs = 1 laranja

2º ⇒ 1 maçã e 1 laranja = 1 maçã



b) Explique como usar essa máquina algumas vezes para transformar três maçãs e quatro laranjas em uma maçã.

3 maçãs e 4 laranjas = 1 maçã

1º ⇒ 2 maçãs = 1 laranja

2º ⇒ 2 laranjas = 1 laranja

3º ⇒ 2 laranjas = 1 laranja

4º ⇒ 2 " ⇒ 1 laranja

5º ⇒ 2 " ⇒ 1 laranja

4 laranjas
1 maçã

⇒ 3 laranjas

⇒ 2 laranjas

⇒ 1 laranja

per último
6º ⇒ 1 laranja +
1 maçã =
maçã



c) Começando com 2018 laranjas e 517 maçãs, a máquina foi usada repetidamente até sobrar apenas uma fruta. Explique por que essa fruta só pode ser uma maçã.

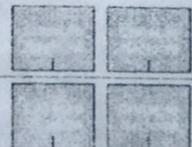
$(M-2, L+1)$ = transforma duas maçãs em uma laranja

$(M, L-1)$ = " duas laranjas em uma laranja

$(M, L-1)$ = " uma maçã e uma laranja em uma maçã

Isso quer dizer que em cada transformação o número de maçãs fica inalterado se diminuir duas.

TOTAL



2. Joãozinho comprou um álbum em que figurinhas numeradas devem ser coladas em ordem crescente, começando na página 2 e terminando na página 61. Nas páginas pares devem ser coladas 5 figurinhas e, nas ímpares, 6 figurinhas.



a) No total, quantas figurinhas devem ser coladas no álbum?

paras $60 \rightarrow 60 \div 2 = 30$

um ímpar sempre estará ao lado do par
portanto também é 30.

$$\left. \begin{array}{l} \text{ímpar } 30 \times 6 = 180 \\ \text{par } 30 \times 5 = 150 \end{array} \right\} 180 + 150 = 330 \text{ figurinhas}$$



b) Em qual página deve ser colada a figurinha de número 196?

cada duas são coladas 6 p/ ímpar e 5 p/ par = 11 figu.

$$\begin{array}{r} 196 \overline{) 11} \\ \underline{11} \\ 086 \\ \underline{77} \\ 9 \end{array}$$

$\Rightarrow 18^\circ$ conjunto de pag $\rightarrow 36$ e 37 na mesma posição.



c) Para completar seu álbum, Joãozinho comprou muitos pacotes de figurinhas. Após colar a última figurinha que faltava, o número de figurinhas repetidas era oito vezes o número de figurinhas coladas.

Se o álbum custou 20 reais e cada pacote com 5 figurinhas custou 2 reais, quanto Joãozinho gastou para ter seu álbum completo?

comprou 330 figurinhas

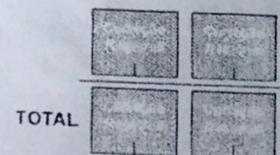
coladas $330 + 8 \text{ vezes} \Rightarrow 330 \times 9 = 2970$

$2970 : 5 \Rightarrow 594 \times 2 \Rightarrow 1.188$ em figurinhas

+ 20 do álbum

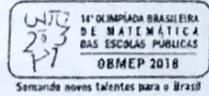
$1.188 + 20 = 1.208$

\Rightarrow ele gastou um total de R\$ 1.208,00 reais



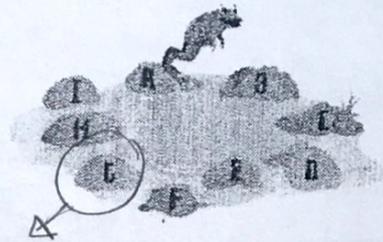
NÍVEL 1

Respostas sem justificativa não serão consideradas.



3. O sapinho da figura pula de uma pedra para uma pedra vizinha, dando voltas em torno do lago. Por exemplo, se ele pular duas vezes a partir da pedra A, no sentido horário, ele vai parar na pedra C.

a) Partindo da pedra A, em qual pedra o sapinho vai parar após pular 15 vezes no sentido horário?



para aqui
5

b) Novamente, partindo de A e começando no sentido horário, o sapinho pula 2018 vezes e sempre muda de sentido cada vez que o número de saltos for um múltiplo de 8. Em qual pedra ele vai parar?

até a I \Rightarrow 8 pulos + 8 para na A
em 16 pulos o sapo estará na A novamente.

$$\begin{array}{r} 2018 \text{ } \overline{) 16} \\ 16 \quad 126 \rightarrow \text{para em A} + 2 \text{ pulos.} \\ \hline 41 \\ 32 \\ \hline 98 \\ 96 \quad \underline{2} \end{array}$$

Parando então na C.

c) Finalmente, partindo de A e começando no sentido horário, o sapinho pula 810 vezes e sempre muda de sentido cada vez que o número de saltos for um múltiplo de 8 ou um múltiplo de 12. Em qual pedra ele vai parar?

8 pulos \rightarrow I \rightarrow muda direção e pula + 4

\downarrow
para na E.

mudando de novo sentido + 4 pulos
para na I de novo.

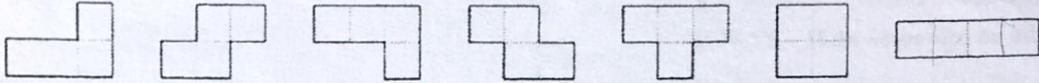
Muda de novo e dá + 8 pulos

para na A. Para o sistema em A são 24 pulos

$$\begin{array}{r} 810 \text{ } \overline{) 24} \\ 72 \quad 33 \\ \hline 90 \quad 18 \end{array}$$

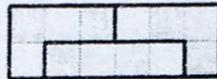
\Rightarrow 33 + resto 18 \Rightarrow um 8 na I + 4 p E + 4 p I
 \hookrightarrow estará em A + 2 p G. Para na G

4. Marília tem sete peças de madeira, como ilustrado abaixo.

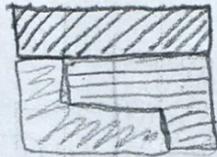


Ela brinca de cobrir todas as casas de tabuleiros retangulares com essas peças, sem colocar uma peça sobre outra. Cada peça deve cobrir exatamente 4 casas do tabuleiro.

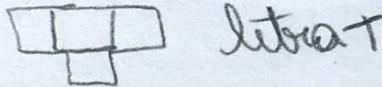
Veja como Marília cobriu um tabuleiro 2 x 6:



a) Cubra o tabuleiro abaixo usando três peças de Marília.



b) Qual peça não cobre o mesmo número de casas brancas e casas cinzas de um tabuleiro?

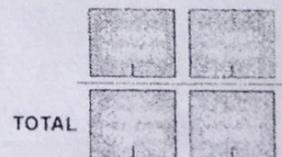


c) Explique por que Marília nunca irá conseguir cobrir o tabuleiro abaixo. *depois de por a T*



*maneira: 11 casas brancas e 13 cinzas
ou 13 casas brancas e 11 cinzas*

porque a T é o único que cobre um número diferente de casas brancas e cinzas



5. Um "matemágico" testa uma nova mágica com Helena. Ele diz a ela:

- pense em dois números de 1 a 9, um par e um ímpar;
- calcule a soma dos números em que você pensou;
- calcule agora a diferença entre o maior e o menor dos números em que você pensou;
- multiplique a soma pela diferença;
- diga qual foi o resultado dessa multiplicação e eu descobrirei quais são os números em que você pensou.



a) Se Helena pensar nos números 4 e 9, que número ela vai dizer ao matemágico?

$$4 + 9 = 13 \quad 13 \times 5 = 65$$

$$9 - 4 = 5$$



b) Se Helena disser 21, em quais números ela pensou?

$$5 + 2 = 7 \quad \left\{ \begin{array}{l} 7 \times 3 = 21 \\ 5 + 2 = 7 \\ 5 - 2 = 3 \end{array} \right. \quad 2 \text{ e } 5$$

$$\text{ou} \\ 4 + 3 = 7$$



c) Explique por que Helena sempre irá dizer um número ímpar.

Pois ela deve pensar sempre em um ímpar e um par. A soma e a diferença entre um par e um ímpar, é um ímpar. Logo o produto de dois números ímpares é um ímpar.



d) Explique por que, se Helena disser 15, o matemágico ficará em dúvida sobre quais seriam os números em que ela pensou.

Existem duas possibilidades

15 x 1 Podem ser

6 e 9 ou 7 e 8

Porém $9 - 6 = 3$

$7 - 8 = 1$

Logo sera 7 e 8

15 x 1 = 15

3 x 5 = 15

* neste caso terá 2 opções ao matemágico

7 e 8 / e / 1 e 4

3 x 5 Podem ser

2 e 3 1 e 4

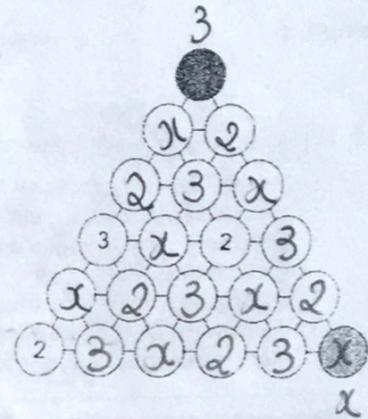
Sera

1 e 4 TOTAL

6. Números naturais devem ser escritos dentro de cada círculo vazio da figura, de modo que a soma dos números escritos em três círculos alinhados e consecutivos seja sempre a mesma.

a) Qual número deverá ser escrito no círculo vermelho?

$$\theta n = 3$$

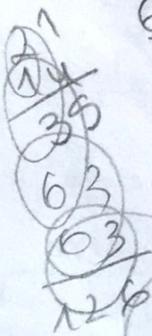


b) Mostre que a soma de todos os números escritos é um múltiplo de 7.

Sete números 2 }
 Sete números 3 } Portanto a soma
 Sete números x } de todos é múltiplo
 de 7.

c) Para que a soma de todos os números escritos seja 63, qual número deverá ser escrito no círculo azul?

$$\frac{63 - 7 \times 2 - 7 \times 3}{7} = \frac{63 - 14 - 21}{7} = \frac{28}{7} = 4$$



$$S = 7 \times 2 + 7 \times 3 + 7 \times x$$

$$63 \cdot 2 = 21 + 21 + 7x$$

$$126 - 39 = 7x$$

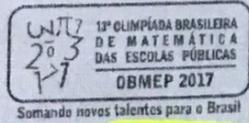
$$\begin{array}{r} 126 \\ - 39 \\ \hline 111 \end{array}$$

TOTAL	

7

22/08/19

Cole aqui a etiqueta com os dados do aluno.



Nível 2
8º e 9º anos do Ensino Fundamental
2ª FASE – 16 de setembro de 2017

Nome completo do(a) aluno(a)

Endereço completo do(a) aluno(a) (Rua, Av., nº)

Complemento (casa, apartamento, bloco) Bairro

Cidade UF CEP

Endereço eletrônico (email) DDD Telefone

Assinatura DDD Telefone (outro)

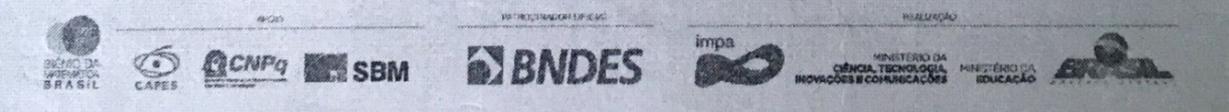
Visite nossas páginas na Internet: www.obmep.org.br www.facebook.com/obmep

Preencha e confira os dados acima com muita atenção!

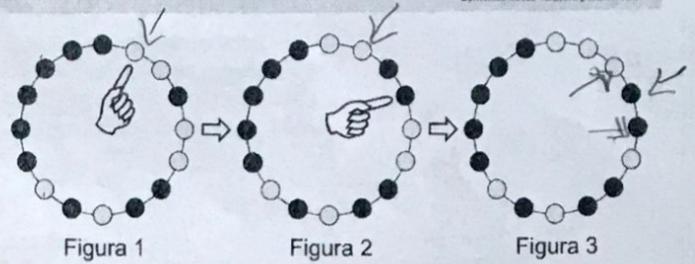
INSTRUÇÕES

1. Verifique se os dados da etiqueta desta prova estão corretos. Caso as informações não estejam corretas, comunique o erro ao aplicador imediatamente.
 2. Preencha cuidadosamente todos os seus dados no quadro acima. Utilize letra de forma, colocando uma letra/dígito em cada quadradinho e deixando um espaço em branco entre cada palavra.
 3. Lembre-se de assinar o quadro acima e a lista de presença.
 4. A prova pode ser feita a lápis ou a caneta.
 5. A duração da prova é de 3 horas. Você só poderá deixar a sala de prova 45 minutos após o início da prova. Ao terminar a prova, entregue-a ao aplicador.
 6. A solução de cada questão deve ser escrita na página reservada para ela, de maneira organizada e legível. Evite escrever as soluções na folha de rascunho.
 7. Na correção serão considerados todos os raciocínios que você apresentar. Tente resolver o maior número possível de itens de todas as questões, principalmente o item (a) de cada questão.
 8. Respostas sem justificativas não serão consideradas na correção.
 9. Não escreva nos espaços sombreados.
 10. Não é permitido:
 - a. usar instrumentos de desenho, calculadoras ou qualquer fonte de consulta;
 - b. comunicar-se com outras pessoas, além do aplicador de provas;
 - c. usar quaisquer aparelhos eletrônicos (celulares, tablets, relógios com calculadora, máquinas fotográficas, etc.).
 O não cumprimento dessas regras resultará em sua desclassificação.
- Boa prova!

	1	2	3	4	5	6	Total
Correção Regional							
Correção Nacional							



1. Dezesesseis botões pretos ou amarelos estão igualmente dispostos num círculo. Toda vez que apertamos um botão, seus dois vizinhos, e somente eles, mudam de cor. No exemplo ao lado, vemos o que acontece quando apertamos o botão amarelo indicado na Figura 1 e, depois, o botão preto indicado na Figura 2.



a) Quantos botões pretos haverá após apertarmos o botão indicado na figura abaixo?



$p = 8$ botões

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

b) A partir de uma figura com 10 botões pretos e 6 amarelos, explique por que, independentemente de quantos e quais forem os botões apertados, o número de botões pretos sempre será par.



Apertando O-O-O , terá +2 pretos.

Apertando B-B-O , terá +1-2 pretos, logo, não muda

Apertando B-B-B , "

Apertando B-B-B , terá -2.

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

c) Explique por que, a partir da figura abaixo, é impossível apertar botões de forma que todos fiquem amarelos ao mesmo tempo.



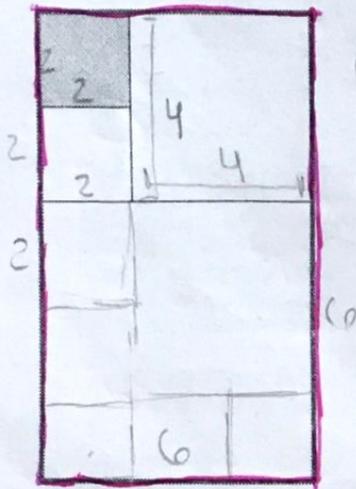
Porque eles teriam que estar intercalados. Como na opção indicada. Nos outros casos, sempre que apertarmos um botão, acabará resultando em algum preto, pois tem amarelo em 1 dos lados.

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

TOTAL

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

2. Pedrinho juntou quatro quadrados, sem sobreposição, e obteve o retângulo de contorno destacado em vermelho na figura. A área do quadrado sombreado é 4 cm^2 .



$$(2 \times 2) + (2 \times 2) + (4 \times 4) + (6 \times 6)$$

$$4 + 4 + 16 + 36$$

$$A = 60 \text{ cm}^2$$

ou

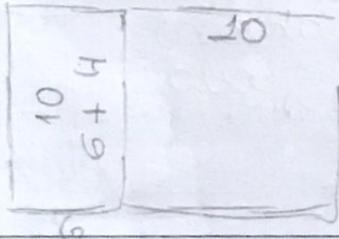
$$10 \times 6 = 60 \text{ cm}^2$$

a) Qual é a área do retângulo de contorno destacado em vermelho?

$$60 \text{ cm}^2$$



b) Pedrinho juntou mais um quadrado à figura, também sem sobreposição, e obteve um novo retângulo de maior área possível. Qual é a área desse novo retângulo?

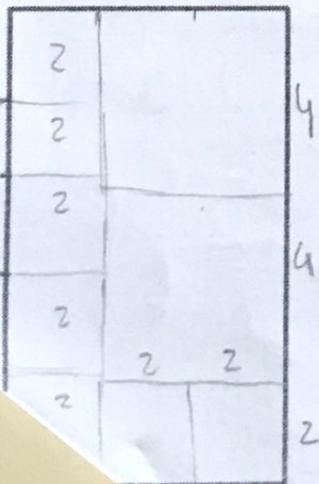


$$16 \times 10 = 160 \text{ cm}^2$$

Se pegar o lado 6, vai ser + 36, ou seja, vai ser o menor



c) Pedrinho quer obter outro retângulo igual ao retângulo do enunciado (destacado em vermelho e reproduzido abaixo), mas agora juntando nove quadrados em vez de quatro. Desenhe, na figura, como ele pode fazer isso.



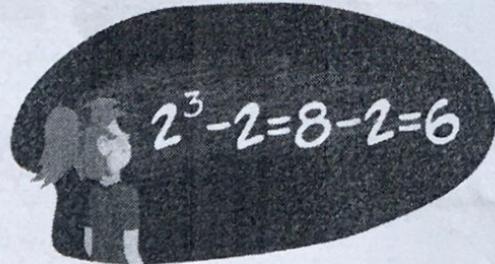
$$60 \text{ cm}^2$$



TOTAL



3. Júlia faz o seguinte cálculo com números inteiros positivos: ela escolhe um número, eleva esse número ao cubo e subtrai desse cubo o próprio número. Veja na figura que o resultado do cálculo de Júlia com o número 2 é igual a 6.



a) Qual é o resultado do cálculo de Júlia com o número 3?

$$m^3 - m$$

$$3^3 - 3 = 27 - 3 = 24$$

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

b) Qual é o número que deve ser escolhido por Júlia para que o resultado do cálculo seja 1320?

$$m^3 - m = 1320$$

$$m(m^2 - 1) = 1320$$

$$m(m-1)(m+1) = 1320$$

antecessor de m
sucessor de m

* ver por aproximação
 $10^3 = 1000$
 $1000 - 10 \rightarrow$ não dá
 $11^3 - 11 = 1331 - 11 = 1320$

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

c) Explique por que, para qualquer número que Júlia escolher, o resultado final do cálculo será sempre um múltiplo de 6.

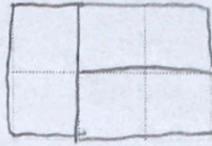
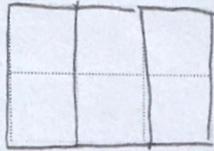
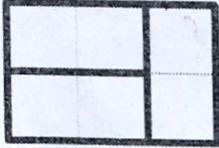
$$m^3 = 1320 + m$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times 11 \\ \hline 11 \\ 11 \\ \hline 121 \\ \times 11 \\ \hline 121 \\ 121 \\ \hline 1331 \end{array}$$

TOTAL	Correção Regional	Correção Nacional
	Correção Regional	Correção Nacional

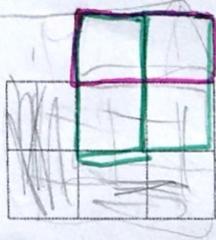
4. Marcela brinca de cobrir todas as casas de tabuleiros quadriculados com peças retangulares e cada uma dessas peças cobre exatamente duas casas do tabuleiro.

a) A figura abaixo mostra uma maneira de cobrir um tabuleiro 2×3 utilizando três peças. Desenhe as outras duas maneiras de cobrir com três peças o mesmo tabuleiro.



Cobrir o tabuleiro	Cobrir o tabuleiro
-----------------------	-----------------------

b) De quantas maneiras diferentes Marcela pode cobrir com quatro peças o tabuleiro abaixo?

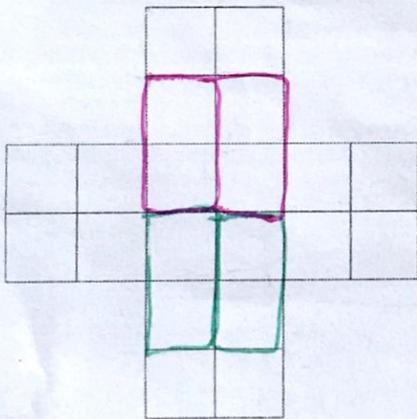


$$1^2 = 1 + 1 + 1 = 3 + 1 = 4$$

$$1 + 1 + 1 = 3 + 1 = 4$$

Cobrir o tabuleiro	Cobrir o tabuleiro
-----------------------	-----------------------

c) De quantas maneiras diferentes Marcela pode cobrir com dez peças o tabuleiro abaixo?



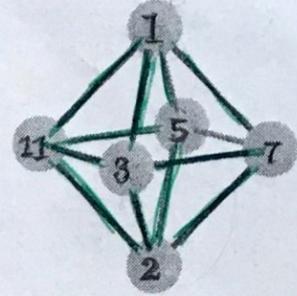
	Cobrir o tabuleiro	Cobrir o tabuleiro
TOTAL	Cobrir o tabuleiro	Cobrir o tabuleiro

5

5. Um objeto foi construído com doze varetas iguais e seis bolinhas numeradas com 1, 2, 3, 5, 7 e 11, como na figura. Uma formiguinha caminha pelas varetas, passeando de bolinha em bolinha, a partir de uma bolinha inicial. Quando termina um passeio, ela multiplica todos os números das bolinhas que visitou e obtém um número para esse passeio. Por exemplo, ao final do passeio

$$3 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 11 \rightarrow 1$$

ela obtém $3 \times 1 \times 3 \times 2 \times 3 \times 11 \times 1 = 594$.



a) Descreva um passeio no qual a formiguinha obtém, ao final, o número 45.

$$3 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 3$$

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

b) Explique por que a formiguinha nunca vai conseguir obter o número 52 ao final de um passeio.

$5 \times 7 \rightarrow \text{molé}$
 $3 \times 2 = 6 \times 3 = 16 \times 2 = 32 \times 3 = \text{muito alto}$
 $2 \times 3 = 6 \times 2 = 12 \times 3 = 36 \times 2 = \text{''}$

$$\begin{array}{r|l} 52 & 2 \\ 26 & 2 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

c) Explique por que a formiguinha nunca vai conseguir obter o número 40 ao final de um passeio.

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

d) Quantos passeios diferentes a formiguinha pode fazer para obter, ao final, o número 30?

Para obter 30, não pode passar por 1, 3, 2 e 5.
 * fazer combinatoria

1º 1 = 2 opções
 1º 3 = 2 opções
 1º 5 = 2 opções
 1º 2 = 2 opções
 } $4 \times 2 = 8$

Sem passar pelo 1:
 $3 \rightarrow 2 \rightarrow 5$
 $5 \rightarrow 2 \rightarrow 3$

Correção Regional	Correção Nacional
TOTAL	

6

$$8 + 2 + 6 = 16$$

6. Um número inteiro n é chamado de *bilegal* se n é maior do que 1 e n^2 é igual à soma de n inteiros positivos consecutivos. Por exemplo, 3 é bilegal, pois $3^2 = 9 = 2 + 3 + 4$.

3 inteiros consecutivos



a) Verifique que 5 é bilegal.

$$5^2 = 25 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7$$

É BILEGAL!

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

b) Verifique que 4 não é bilegal.

$$4^2 = 16 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$2 + 3 + 4 + 5 = 14$$

$$3 + 4 + 5 + 6 = 18$$

Os próximos não são maiores que 16!

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

c) Explique por que nenhum número par é bilegal e todo número ímpar maior do que 1 é bilegal.

$$k = 3$$

$$m^2 = \underbrace{m^2}_{1^\circ m^\circ} + \frac{m(m-1)}{2}$$

Lembrete:
A soma $1 + 2 + 3 + \dots + (k-1)$ é igual a $\frac{k(k-1)}{2}$.

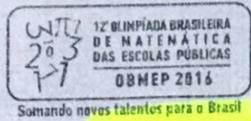
Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

TOTAL

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

JS/09/19

Cole aqui a etiqueta com os dados do aluno.



Nível 3
Ensino Médio

2.ª FASE – 10 de setembro de 2016

Nome completo do aluno

Endereço completo do aluno (Rua, Av., nº)

Complemento (casa, apartamento, bloco) Bairro

Cidade UF CEP

Endereço eletrônico (email) DDD Telefone

Assinatura DDD Telefone (outro)

Visite nossas páginas na Internet:



www.obmep.org.br



www.facebook.com/obmep

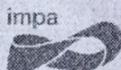
Preencha e confira os dados acima com muita atenção!

INSTRUÇÕES

1. Verifique se os dados da etiqueta desta prova estão corretos. Caso as informações não estejam corretas, comunique o erro ao aplicador imediatamente.
2. Preencha cuidadosamente todos os seus dados no quadro acima. Utilize letra de forma, colocando uma letra/dígito em cada quadradinho e deixando um espaço em branco entre cada palavra.
3. Lembre-se de assinar o quadro acima e a lista de presença.
4. A prova pode ser feita a lápis ou a caneta.
5. A duração da prova é de 3 horas. Você só poderá deixar a sala de prova 45 minutos após o início da prova. Ao terminar a prova, entregue-a ao aplicador.
6. A solução de cada questão deve ser escrita na página reservada para ela, de maneira organizada e legível. Evite escrever as soluções na folha de rascunho.
7. Na correção serão considerados todos os raciocínios que você apresentar. Tente resolver o maior número possível de itens de todas as questões, principalmente o item (a) de cada questão.
8. Respostas sem justificativas não serão consideradas na correção.
9. Não escreva nos espaços sombreados.
10. Não é permitido:
 - a. usar instrumentos de desenho, calculadoras ou qualquer fonte de consulta;
 - b. comunicar-se com outras pessoas, além do aplicador de provas;
 - c. usar quaisquer aparelhos eletrônicos (celulares, tablets, relógios com calculadora, máquinas fotográficas, etc.).
 O não cumprimento dessas regras resultará em sua desclassificação.

Boa prova!

	1	2	3	4	5	6	Total
Correção Regional							
	1	2	3	4	5	6	Total
Correção Nacional							

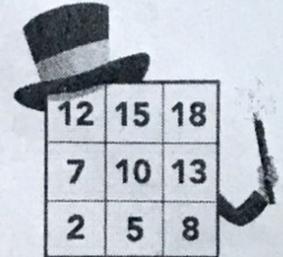


MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO



1. Um quadriculado 3x3 preenchido com números inteiros é chamado de *medimágico* quando, em cada linha horizontal, vertical ou diagonal, o termo do meio é a média aritmética dos outros dois.



a) Preencha o quadriculado abaixo para que ele seja medimágico.

→	3	11	19
→	8	16	
→	13		
↙			
	↑	↑	↑

$$L_1 = \frac{3+19}{2} = \frac{22}{2} = 11$$

$$C_1 = \frac{3+x}{2} = 8 \Rightarrow 3+x = 16 \Rightarrow x = 13$$

$$D = \frac{19+13}{2} = \frac{32}{2} = 16$$

Corrigido Resposta Corrigido Alternativa

b) O quadriculado medimágico abaixo tem os números 7, 9 e 20 nas posições indicadas. Qual é o valor de x?

y	7	v
9	x	18
z		20

$$\begin{cases} \frac{y+20}{2} = x & y = 2x - 20 \\ \frac{z+7}{2} = x & z = 2x - 7 \\ \frac{w+9}{2} = x & w = 2x - 9 \end{cases}$$

Corrigido Resposta Corrigido Alternativa

c) Explique por que, em qualquer quadriculado medimágico, a soma de todos os números é um múltiplo de 9.

$$20 + \frac{2x - 20}{2} = x$$

$$2x + \frac{2x - 20 + t}{2} = 9$$

$$2x - 2x - 20 + t = 18$$

$$2x + t = 38 - 2x$$

$$38 - 2x + 20 = 2x - 7$$

$$58 - 2x = 2x - 7$$

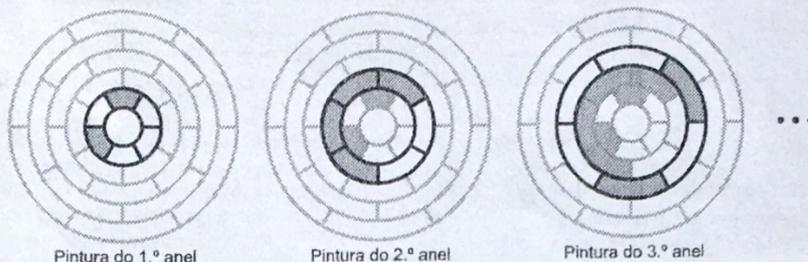
$$38 - 2x + 20 = 4x - 14$$

$$58 + 14 = 6x$$

$$\frac{72}{6} = x \Rightarrow x = 12$$

TOTAL
Corrigido Resposta Corrigido Alternativa
Corrigido Resposta Corrigido Alternativa

2. Joãozinho pinta anéis encaixados, cada um deles dividido em seis partes iguais. No primeiro anel (o menor deles) Joãozinho pinta de cinza algumas partes, à sua escolha. Do segundo anel em diante, ele pinta de cinza somente as partes em contato com duas partes de cores diferentes do anel anterior. Observe um exemplo:

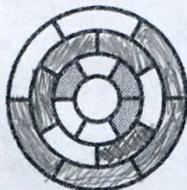


Pintura do 1.º anel

Pintura do 2.º anel

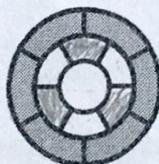
Pintura do 3.º anel

a) Joãozinho pintou o primeiro anel conforme a figura abaixo. Continue o trabalho de Joãozinho, pintando, na mesma figura, o segundo e o terceiro anéis.



Correção Regular	Correção Especial
------------------	-------------------

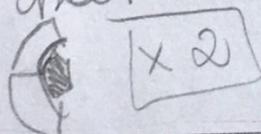
b) Na figura abaixo, pinte as partes do primeiro anel de modo que o segundo anel fique todo pintado de cinza.



Correção Regular	Correção Especial
------------------	-------------------

c) Explique por que, independentemente de como Joãozinho pintar o primeiro anel, os demais anéis sempre terão uma quantidade par de partes pintadas de cinza.

Como a sequência é dada através do contato com as 2 partes de cores diferentes, mesmo que eu pintar um n° ímpar no 1º anel, resultará um n° par na segunda.



Correção Regular	Correção Especial
------------------	-------------------

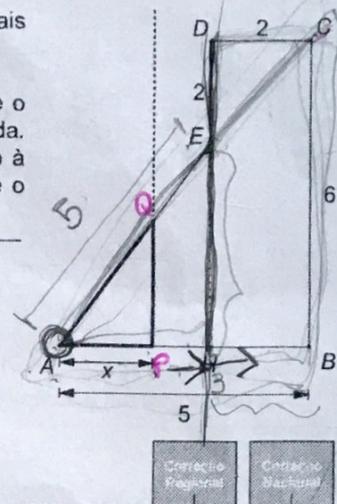
d) Explique por que, independentemente de como Joãozinho pintar o primeiro anel, nenhum anel a partir do terceiro será totalmente pintado de cinza.

Para obter um anel todo pintado é necessário ter cores alteradas, ou seja, 3 cinzas e 3 brancas. Como 3 é ímpar, a partir do 1º anel é sempre $\times 2$, então não tem como obter n° ímpar

Correção Regular	Correção Especial
TOTAL	3

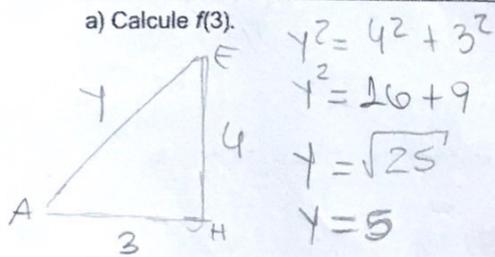
3. A figura mostra um polígono ABCDE em que todos os lados, exceto AE, são horizontais ou verticais e têm os comprimentos indicados na figura.

Considere, agora, uma reta vertical distante x do vértice A, com $0 < x \leq 5$. Ela divide o polígono ABCDE em dois polígonos, um situado à direita da reta e outro à esquerda. Considere a função f que associa a cada valor de x o perímetro do polígono situado à esquerda da reta. Por exemplo, $f(3)$ é o perímetro do triângulo AHE, enquanto $f(5)$ é o perímetro do polígono ABCDE.



Correção Regional Correção Nacional

a) Calcule $f(3)$.



$$y^2 = 4^2 + 3^2$$

$$y^2 = 16 + 9$$

$$y = \sqrt{25}$$

$$y = 5$$

$$P(3) = 3 + 4 + 5$$

$$P(3) = 12$$

b) Calcule $f(5)$.

$$f(5) = 5 + 5 + 6 + 2 + 2 = 20$$

Correção Regional Correção Nacional

c) Escreva as expressões de $f(x)$ para $0 < x \leq 3$ e para $3 < x \leq 5$.

$x \leq 3$
perímetro APQ
semelhante a AHE

$$\frac{AP}{AH} = \frac{PQ}{HE} = \frac{AQ}{AE}$$

$$\frac{x}{3} = \frac{PQ}{4} \Rightarrow PQ = \frac{4x}{3}$$

$$\frac{x}{3} = \frac{AQ}{5} \Rightarrow AQ = \frac{5x}{3}$$

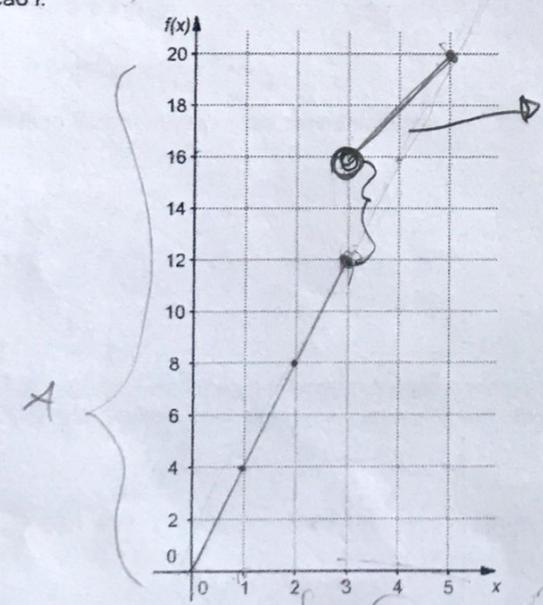
$$f(x) = AP + PQ + AQ$$

$$x + \frac{4x}{3} + \frac{5x}{3} = x + 9x/3 = 4x$$

$$g(x) = 4x$$

Correção Regional Correção Nacional

d) Esboce o gráfico da função f .

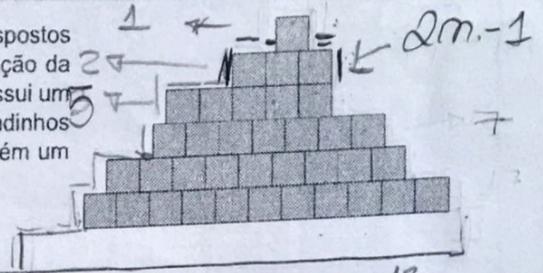


para do 3 já é 3, ...
2x6=12

Correção Regional Correção Nacional

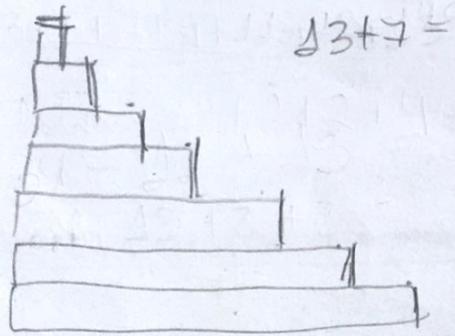
TOTAL Correção Regional Correção Nacional

4. Uma figura é construída por fileiras horizontais de quadradinhos 1x1, dispostos lado a lado, sem sobreposição e sem espaçamento. Cada fileira, com exceção da primeira, está encostada inteiramente na fileira de baixo. A primeira fileira possui um número ímpar de quadradinhos e cada uma das demais possui dois quadradinhos a menos do que a fileira imediatamente abaixo. A última fileira sempre contém um único quadradinho.



Ao lado, vemos uma figura na qual a primeira fileira contém 13 quadradinhos.

a) Encontre a área e o perímetro de uma figura com 13 quadradinhos na primeira fileira.



$$\Delta 13 + 7 = 20 + 7 = 27 + 12 = 39 = 40$$

b) Mostre que, independentemente do número de quadradinhos da primeira fileira, o número total de quadradinhos de uma figura é o quadrado de um número natural.

$$\sqrt{A} = n$$

$$A = 1 + 3 + 5 + \dots + (2m-1)$$

c) Mostre que, independentemente do número de quadradinhos da primeira fileira, a área A e o perímetro p da figura satisfazem a igualdade $(p + 2)^2 = 36A$.

$A = \text{total quadradinhos}$

$$A = m^2$$

$p = \text{perímetro}$

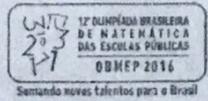
$$\text{horizontal} = 2m - 1$$

	Gráfico	Gráfico
TOTAL	Gráfico	Gráfico

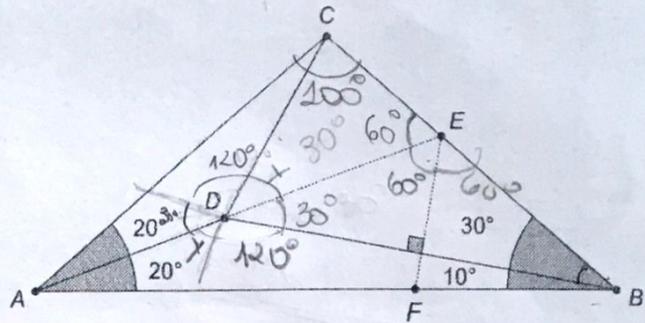
$150^\circ + 20^\circ$
 10°

NÍVEL 3

Respostas sem justificativa não serão consideradas



5. As medidas em graus dos ângulos $B\hat{A}D$, $D\hat{A}C$, $A\hat{B}D$ e $D\hat{B}C$ estão indicadas na figura. O ponto E é a interseção de BC com o prolongamento de AD , e o ponto F é a interseção de AB com a perpendicular a BD por E .



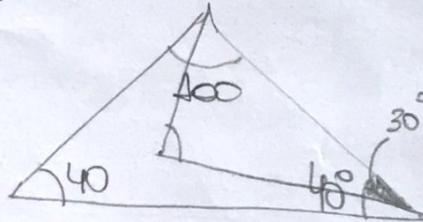
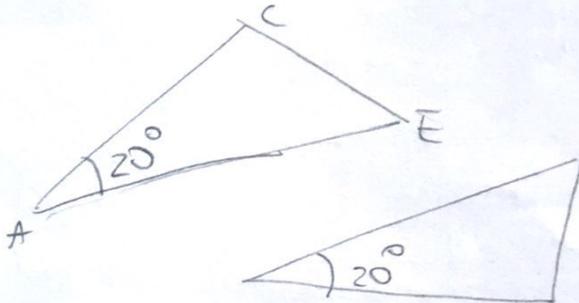
a) Qual é a medida do ângulo $B\hat{D}E$?

$$\gamma = 180 - 30 = 150^\circ$$

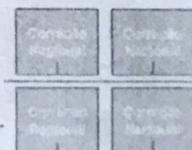
$$\chi = 180 - 150^\circ = 30^\circ$$



b) Mostre que os triângulos ACE e AFE são congruentes.



c) Qual é a medida do ângulo $B\hat{C}D$?



TOTAL

6. Seis bolas idênticas foram numeradas de 1 a 6 e colocadas em uma caixa. Joaquim retira, uma a uma, quatro bolas da caixa e observa seus números, sem recolocá-las na caixa.



a) Qual é a probabilidade de que o menor número observado seja 1?

cada bola tirada: $\frac{1}{6}$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$



b) Qual é a probabilidade de que o maior número observado seja 5?

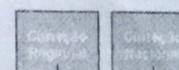
$$P_A = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{24}{360} = \frac{1}{15}$$



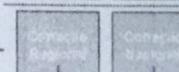
c) Qual é a probabilidade de que o menor número observado seja 1 e o maior seja 5?



d) Qual é a probabilidade de que o menor número observado saia na primeira bola retirada e o maior, na última bola?



TOTAL



7